

CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN 2D Y EN 3D: SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN,  
APRENDIZAJE Y ASOCIACIONES

HERMES CASTELLANOS ROMERO

Trabajo de investigación para optar el título de Magister en Educación

Director:

M Sc Carlos Javier Rojas Álvarez

FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DEL NORTE

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN PENSAMIENTO MATEMÁTICO

BARRANQUILLA

2019

## **Dedicatoria**

A Dios por guiarme y darme lo que necesito para salir adelante.

A mi esposa e hijos, Yenisseth, Kenneth y Khiara; son las personas por las cuales mantengo las ganas para vencer los obstáculos y vivir en un ambiente de unión y armonía.

A mi padre y hermanos: Hermes, Karina, Mafel y Germán, que siempre están dispuestos a ayudarme con su lealtad y disciplina.

Hermes Castellanos Romero

## **Agradecimientos**

A mi asesor de proyecto de grado el profesor Carlos Javier Rojas Álvarez, que con paciencia y entrega me ayudó con la preparación necesaria para la realización del trabajo de grado.

A los estudiantes de 9°, que con su perseverancia, dedicación y motivación, realizaron las actividades de aprendizaje.

A los compañeros de trabajo y directivos docentes que facilitaron la gestión e insumos para la búsqueda de alternativas que contribuyan al mejoramiento de la calidad educativa de la Institución Educativa Distrital Nuestra Señora del Rosario.

## Índice general

Resumen .....	8
Introducción .....	9
2. Planteamiento del problema .....	11
3. Justificación.....	18
4. Marco teórico .....	20
4.1 Estado del arte .....	20
4.2 MARCO CONCEPTUAL .....	25
4.2.1 Concepto de área.....	25
4.2.2 Conservación de área .....	27
4.2.3 Sistemas de representación de Bruner .....	29
5. Objetivos .....	31
5.1 Objetivo general .....	31
5.2 Objetivos específicos.....	31
6. Metodología .....	32
6.1 Enfoque.....	32
6.2 Tipo.....	32
6.3 Diseño .....	33
6.4 Población y participantes.....	33
6.5 Técnicas e instrumentos.....	33

6.6 Procedimiento .....	34
7. Resultados .....	37
7.1 aumento significativo del aprendizaje de la conservación del área en 2D .....	39
7.2 Aumento significativo del aprendizaje de la conservación del área en 3D .....	41
7.3 asociación del aprendizaje de la conservación del área en 2D y en 3D .....	45
7.4 determinación de la valoración de la metodología por parte de los estudiantes.....	46
8. Conclusiones .....	48
9. Recomendaciones.....	49
Referencias .....	50
Anexos.....	53
Anexo1. Preprueba .....	53
Anexo 2. Posprueba.....	55
Anexo 3. Plan de clase 1.....	57
Anexo 4. Plan de clase 2.....	64
Anexo 5. Encuesta tipo likert.....	71
Anexo 6. Evidencias fotográficas de las sesiones .....	72

## Índice de tablas

Tabla 1: Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC) de la pregunta 26 del cuadernillo de la prueba Saber de 9° de 2012.....	13
Tabla 2: Técnicas e instrumentos de recolección.....	34
Tabla 3: Criterios de evaluación.....	34
Tabla 4: Resultados de la preprueba aplicada a una muestra de estudiantes de 9°.....	37
Tabla 5: Resultados de la posprueba aplicada a una muestra de estudiantes de 9°.....	38
Tabla 6: Comparativo de los resultados de la preprueba y la posprueba correspondientes a la conservación de área en 2D.....	39
Tabla 7: Contingencia de 2 x 2 de los resultados de la preprueba y posprueba para la conservación de área 2D.....	40
Tabla 8: Comparativo de los resultados de la preprueba y la posprueba correspondientes a la conservación de área en 3D.....	42
Tabla 9: Contingencia de 2 x 2 de los resultados de la preprueba y posprueba para la conservación de área 2D.....	43
Tabla 10: Contingencia de 2 x 2 de los resultados de la preprueba y posprueba para la conservación de área 2D y 3D.....	45
Tabla 11: Resultados de la encuesta tipo Likert.....	46

## Índices de las figuras

<i>Figura 1.</i> Pregunta 26 del cuadernillo de prueba saber 9° de 2012.....	13
<i>Figura 2.</i> Niveles de desempeño de la prueba Saber de 9° en el área de matemáticas con escala de valores es de 0% a 100%.....	14
<i>Figura 3.</i> Componentes evaluados en matemáticas para noveno grado en la prueba saber de 2015.....	15
<i>Figura 4.</i> Componentes evaluados en matemáticas para noveno grado en la prueba saber de 2016.....	16
<i>Figura 5.</i> Componentes evaluados en matemáticas para noveno grado en la prueba saber de 2017.....	16

## Resumen

El objeto de estudio de esta investigación se centra en aumentar la conservación del área en 2D y en 3D, en explorar la asociación entre sus aprendizajes y determinar la valoración de la estrategia didáctica en un grupo de estudiantes; estrategia didáctica que consistió en la aplicación de los sistemas de representación de Bruner. Este estudio es cuantitativo y descriptivo con diseño preexperimental de preprueba y posprueba, participaron 29 estudiantes de ambos géneros con edades que oscilan entre 14 y 15 años quienes fueron seleccionados por muestro intencional.

Para el análisis de los resultados se aplicó la prueba de McNemar con un nivel de significancia de  $\alpha = 0,01$  y una encuesta con escala Likert. Se concluye que aumentó la conservación en 2D y en 3D, que el estudiante que no conserva el área en 2D no conserva el área en 3D y que los estudiantes valoraron positivamente la estrategia aplicada.

Palabras claves: Conservación, área, sistemas de representación de Bruner, asociación.



## Introducción

Los resultados expuestos en los informes del ICFES de los años 2015, 2016 y 2017 de la prueba saber de 9° evidencian el bajo desempeño del componente geométrico-métrico, el cual involucra al pensamiento métrico y los sistemas de medida. De acuerdo con los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN, el tema conservación del área en 2D y 3D está relacionado con uno de los procesos que se deben trabajar en el pensamiento métrico; lo anterior compromete los estándares curriculares de matemáticas donde dicen que un estudiante de 9° debe generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos, seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados y justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

Teniendo en cuenta el tipo de pensamiento y los estándares, este trabajo investigativo se centra en el tema de área por su relevancia para la construcción de conceptos matemáticos tales como fracciones, porcentajes, volumen e integración para el desarrollo de habilidades y destrezas, como son la resolución de problemas, razonamientos, argumentaciones y visualización por el papel importante que juega la medición del área en la construcción de los procesos de la medición en el cerebro, también es un concepto útil que se refleja en múltiples situaciones cotidianas y en otras disciplinas.

En la investigación se aplicaron dos instrumentos a una muestra de estudiantes del grado noveno correspondiente al nivel de educación básica secundaria de una institución de naturaleza oficial y carácter mixto ubicada en la ciudad de Barranquilla.

A los resultados obtenidos en la preprueba y posprueba se les aplicó la prueba de McNemar y los resultados están acorde con los objetivos trazados en el trabajo de grado, evidenciando que después

de la aplicación de los planes de clases teniendo en cuenta los sistemas de representación de Bruner se determinó un aumento significativo en el desarrollo de los procesos de conservación del área en 2D y 3D.

En cuanto a la asociación de los resultados de la conservación de área 2D y 3D, se demuestra que no es posible que un estudiante que no tenga conservación de área en 2D tenga conservación de área en 3D.

Por otro lado, la valoración de la metodología por parte de los estudiantes a través de la aplicación de la encuesta tipo Likert, refleja gran aceptación de la metodología destacando que un porcentaje de estudiantes manifestó no estar de acuerdo con los tiempos asignados para el desarrollo de los planes de clases.

## 2. Planteamiento del problema

En diferentes investigaciones se presentan situaciones relevantes que evidencian las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la conservación del área, según Freudenthal (1983):

En educación al menos en educación primaria, donde las actitudes se adquieren y se fijan, el área está demacrada a “largo por ancho”; se rellena con una fórmula para el círculo que no tiene ninguno de ellos (¿o sí?); Para los volúmenes hay unas cuantas fórmulas más en la educación primaria y secundaria; y el Cálculo cuenta con una maquinaria para calcular las áreas y volúmenes de figuras fabricadas. (p.372)

Lo planteado por Freudenthal demuestra que el estudiante no está trabajando el concepto de área de manera adecuada y por ende no realiza las actividades necesarias para desarrollar la conservación del área y el volumen (Del Olmo, Moreno y Gil, 1989. En: Marmolejo y González 2014).

Por otro lado, Marmolejo y González (2015) concluyen que a pesar de la gran variedad de investigaciones que se han realizado en torno al área, aún permanece la complejidad en su estudio; lo cual indica que se requiere de otros enfoques diferentes a los tradicionales y que no solo sea la aplicación del tratamiento aritmético dejándose a un lado su naturaleza. (p.53)

De Carvalho (como se citó en Marmolejo y González, 2015) piensa que esta situación de estudiar el área desde el punto de vista aritmético también se refleja en los libros al tratar la fórmula  $A = b \times h$ , lo cual favorece en gran medida tareas que promueven exclusivamente la sustitución de valores en ella y que, por el contrario, no se consideran las técnicas que privilegian comprender su significado. (p.51)

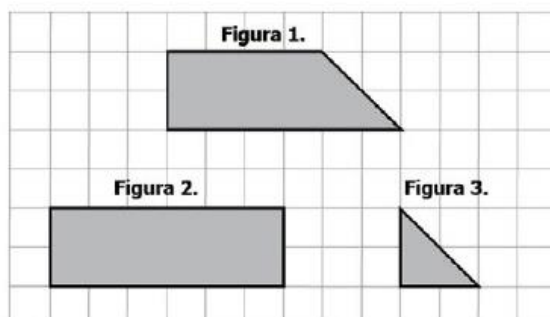
Teniendo en cuenta que el tema conservación de área es fundamental en el desarrollo del pensamiento métrico, no es conveniente limitarlo al uso de fórmulas, sino que es necesaria la representación gráfica para dar a conocer las ideas por medio de imágenes, lo cual tiene un gran valor porque “resulta obvio que una imagen apela a nuestra intuición de manera más directa que una fórmula” (Goñi, 2011, p.188). La enseñanza del pensamiento métrico requiere del uso de varios sistemas de representación para facilitar la resolución de problemas (Eisner, 1998).

En un informe del Instituto Colombiano para el fomento de la Educación superior (ICFES), se observa un análisis de las diferencias del desempeño de los estudiantes desagregados por género, nivel socioeconómico (NSE) y tipo de establecimiento, para cada una de las áreas y los grados evaluados, así como el desempeño de algunas entidades territoriales certificadas. Los resultados son útiles para identificar las debilidades y las fortalezas de los estudiantes y para generar estrategias de aprendizaje que les ayuden a los estudiantes a mejorar su nivel de desempeño académico (ICFES, 2016).

En el mencionado informe, se tiene que la pregunta 26 de la prueba Saber de 9° del año 2012 corresponde al componente geométrico-métrico y al tema de área de figuras planas como lo muestra la figura 1:

• **Pregunta 26.**

Observa las figuras dibujadas sobre la cuadrícula.



El área de la figura 2 es igual a

- A. el área de la figura 1 más el área de la figura 3.
- B. dos veces el área de la figura 1.
- C. tres veces el área de la figura 3.
- D. el área de la figura 1 menos el área de la figura 3.

*Figura 1.* Pregunta 26 del cuadernillo de prueba saber 9° de 2012. Fuente: ICFES (2016, p.106).

La tabla 1 muestra los resultados de esta pregunta en Barranquilla, Atlántico y Colombia:

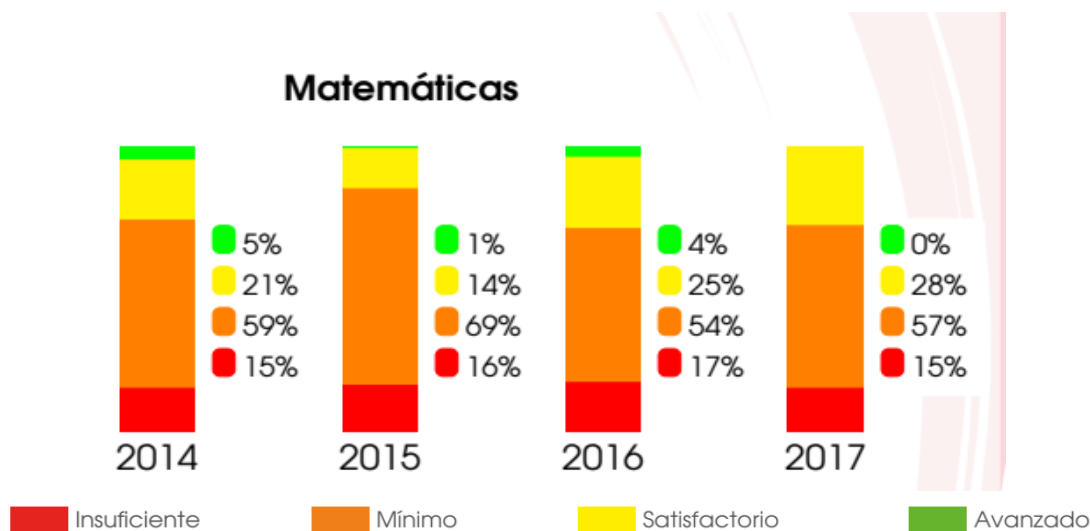
Tabla 1. Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC) de la pregunta 26 del cuadernillo de la prueba Saber de 9° de 2012.

ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	No. De estudiantes
Colombia	63,2%	8,3%	12,7%	14,8%	1,0%	275.339
Atlántico	53,1%	12,9%	14,4%	19,0%	0,7%	3.385
Barranquilla	62,9%	8,7%	12,6%	15,0%	0,8%	6.501

Fuente: ICFES (2016, p.107 y109)

Para la pregunta 26, la respuesta correcta es la opción A, por lo tanto la tabla 1 muestra que el 36.3% de los estudiantes de Barranquilla que presentaron la prueba tienen dificultad para determinar el área de figuras planas y este porcentaje es mayor que el porcentaje a nivel nacional es de 35,8%.

Por otro lado, en el año 2018 la Institución Educativa Distrital Nuestra Señora del Rosario recibió el reporte de la excelencia, informe que contiene un resumen del Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) del cuatrienio (2014 – 2017) y sus respectivos componentes (ICFES, 2018), de este informe se tomó solamente la información correspondiente a 9° en el área de matemáticas la cual se resume en la siguiente gráfica:



*Figura 2.* Niveles de desempeño de la prueba Saber de 9° en el área de matemáticas con escala de valores es de 0% a 100%. Fuente: ICFES (2018, p.6).

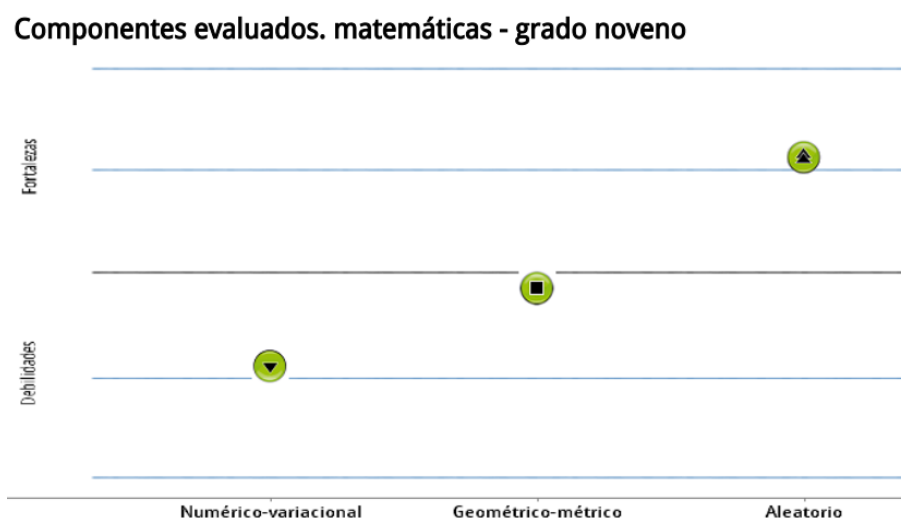
De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba saber se tiene lo siguiente:

- En el año 2014 el 74% de los estudiantes de 9° se encuentran en un nivel de desempeño insuficiente y mínimo.
- En el año 2015 el 85% de los estudiantes de 9° se encuentran en un nivel de desempeño insuficiente y mínimo.
- En el año 2016 el 71% de los estudiantes de 9° se encuentran en un nivel de desempeño insuficiente y mínimo.
- En el año 2017 el 72% de los estudiantes de 9° se encuentran en un nivel de desempeño insuficiente y mínimo.

Estos resultados dejan claro que la institución durante los 4 años ha mantenido un desempeño insuficiente y mínimo en el área de matemáticas en la mayoría de sus estudiantes.

En la revisión de informes de los resultados de la prueba saber 9° en los años 2015, 2016 y 2017 publicados por el ICFES, la evaluación de los componentes numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio presentó los siguientes resultados:

- En el año 2015 al comparar la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar en el área y grado evaluado, mantuvo un desempeño similar al desempeño de otras instituciones educativas, como lo muestra la figura 3 (ICFES, s.f).



*Figura 3.* Componentes evaluados en matemáticas para noveno grado en la prueba saber de 2015. Fuente: ICFES (s.f., p.7)

- En el año 2016 la Institución Educativa Distrital Nuestra Señora del Rosario al ser comparada con los establecimientos que presentan un promedio similar en el área y grado evaluado obtuvo un desempeño muy débil en el componente geométrico-métrico; reflejado en la figura 4 (ICFES, s.f).

### Componentes evaluados. matemáticas - grado noveno

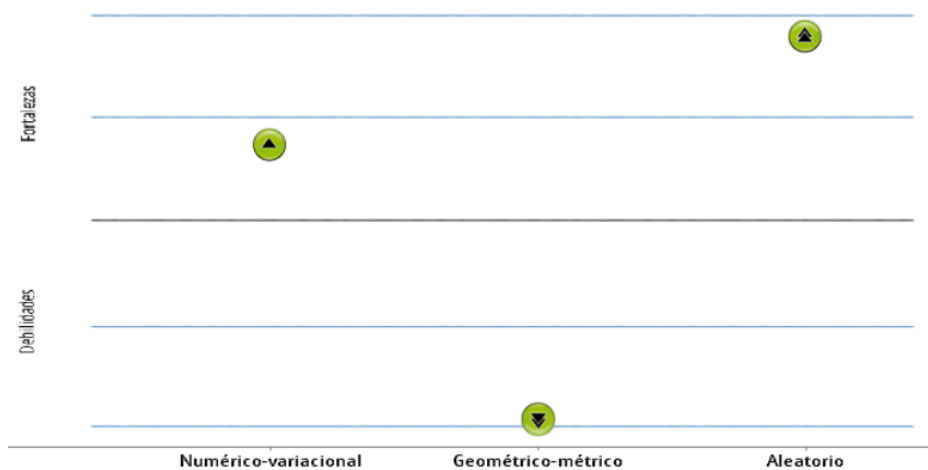


Figura 4. Componentes evaluados en matemáticas para noveno grado en la prueba saber de 2016. Fuente: ICFES (s.f., p.7)

- Por último, en el año 2017 la institución en el componente geométrico-métrico se mantuvo en desempeño muy débil, como lo presenta la figura 5 (ICFES, s.f).

### Componentes evaluados. matemáticas - grado noveno

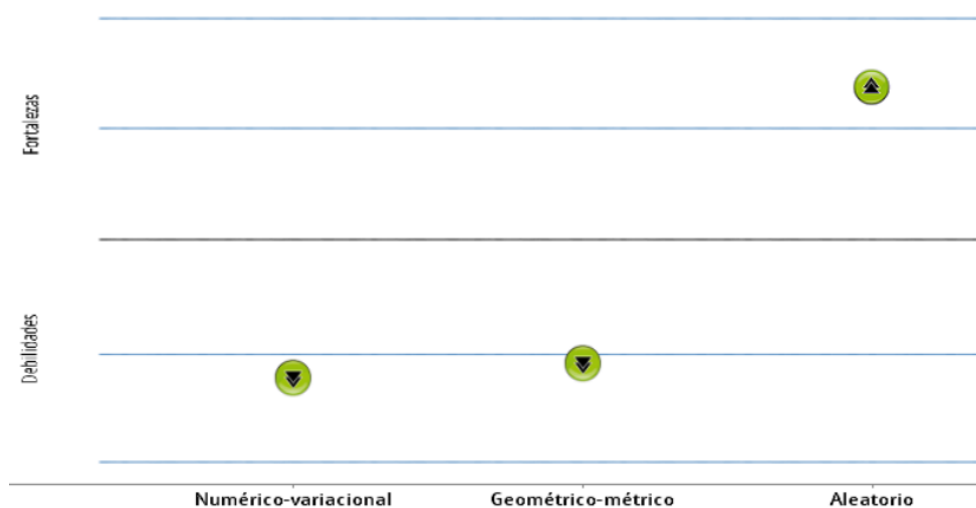


Figura 5. Componentes evaluados en matemáticas para noveno grado en la prueba saber de 2017. Fuente: ICFES (s.f., p.7)

Luego del análisis de los resultados en las pruebas Saber de 9° de los años 2015, 2016 y 2017, se concluye que la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario presenta debilidad en el



pensamiento geométrico-métrico, por lo tanto se requiere transformar la práctica pedagógica con el objetivo de aumentar los aprendizajes relacionados con el pensamiento geométrico-métrico a través de la aplicación de los sistemas de representación de Bruner para el aprendizaje del área de figuras planas y sólidas. Esta situación lleva a formular las siguientes preguntas:

***¿Con la aplicación de los sistemas de representación de Bruner podría aumentar el aprendizaje de la conservación del área en 2D y en 3D para un grupo de estudiantes de 9°?***

***¿Cómo es la asociación entre el aprendizaje de la conservación del área en 2D y en 3D para la preprueba y la posprueba?***

### 3. Justificación

Este trabajo es relevante porque “el pensamiento métrico no se limita a las matemáticas sino que se extiende también a las ciencias naturales y sociales” (MEN, 2006, p.64), ya que el estudio de algunas magnitudes (área y volumen) se aplican en la física (presión y densidad) y en la facturación de servicios públicos (el gas y el agua se cobran por metros cúbicos). El estudiante también enfrenta situaciones problemas de la vida cotidiana relacionadas con la superficie y los espacios por donde se mueve o interactúa. Por ejemplo: venta de un apartamento con una determinada área, letreros en las cajas donde establecen cuantas cajas se pueden apilar en una bodega, comprar tablas de triple y láminas de icopor.

Entre las magnitudes, el área es una magnitud trascendental por dos aspectos:

- 1) Se usa para medir objetos de una variedad que se ve más variada que para cualquier otra magnitud: Un rollo o un corte de tela, la superficie de un lago, una pared para pintar, un piso para cubrir con alfombras, un campo para sembrar, un piso para embaldosar, entre otras, (Freudenthal, 1983).
- 2) Es clave en la construcción de otros conceptos matemáticos como el porcentaje, las fracciones y la integración (Marmolejo y González, 2015).

Si de niveles se trata el área y el volumen son los conceptos que más variedad de niveles tiene (Freudenthal, 1983), entre los cuales está el de recubrimiento y comparación que se involucran en este trabajo. Y finalmente, la pertinencia de este trabajo también está dada por ser una opción de solución a los bajos niveles de desempeño que tienen los estudiantes de noveno grado en el

componente geométrico-métrico de acuerdo con los resultados de las pruebas Saber 9° en los años 2016 y 2017.

Este trabajo de grado es pertinente con el énfasis de Pensamiento Matemático de la Maestría en Educación porque los conceptos de área y volumen hacen parte del Pensamiento Métrico, que es uno de los cinco pensamientos que conforman el Pensamiento Matemático según los Lineamientos Curriculares MEN (1998)(MEN, 2006).

La viabilidad de este trabajo de grado es por las siguientes razones:

- Disposición de los directivos docentes.
- Recursos didácticos de fácil elaboración y económicos.
- La motivación del profesor.

## **4. Marco teórico**

### **4.1 Estado del arte**

Usar de manera adecuada el conocimiento matemático implica establecer relaciones entre lo conceptual y lo procedimental, si los estudiantes no logran establecer las relaciones, estarían memorizando procedimientos y no comprenderlos genera inseguridad en la resolución de problemas. Es decir, favorecer el aprendizaje matemático se apoya en el establecimiento de relaciones (Goñi, 2011). Trabajar el pensamiento matemático requiere un proceso de enseñanza que involucra la teoría acompañada de la práctica en los diferentes contextos de las matemáticas, no se debe realizar un plan de clases que solo proporcione gran cantidad de información a sus estudiantes sin implementar actividades necesarias para la aplicación del conocimiento porque estaría impidiendo que el estudiante haga uso de estrategias y técnicas para representar conceptos a través de acciones, imágenes y símbolos. Además, es importante tener en cuenta que hoy en día la expresión gráfica o icónica de las Matemáticas se ha extendido mucho hasta invadir los espacios sociales y convertirse en un tipo de expresión lingüística universal; la extensión de las tecnologías de la información y su presencia en todos los ámbitos sociales ha dado mayor relevancia a este ámbito internacional. (Goñi, 2011, p.189)

Es notoria la importancia de las formas de representación como herramienta para contribuir al desarrollo de los procesos generales: razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos definidos en los lineamientos curriculares. (MEN, 1998). Sin embargo, no se puede dejar a un lado el uso de material manipulativo que facilita el aprendizaje de la conservación del área.

Las investigaciones que se han realizado acerca de la enseñanza y aprendizaje de la conservación de área muestran los siguientes resultados:

- En la actualidad, para la preparación de las actividades de aprendizaje los docentes cuentan con unos lineamientos curriculares, derechos básicos de aprendizaje y orientaciones pedagógicas que contribuyen al desarrollo de buenas prácticas pedagógica. Además de los referentes mencionados, es importante tener presente que según Piaget (como se citó en Cabañas y Cantoral, 2005) la ausencia de actividades para manipulaciones de área, principalmente aquellas con las cuales se inician las acciones sensorio-motoras de los niños, el salto del concepto de conservación de área y el uso prematuro de fórmulas de áreas matemáticas en la escuela causa dificultades en la mayoría de los estudiantes en este tema. Además, los niños no tienen la oportunidad para crear sus herramientas subjetivas para medir; por ejemplo unidades o cuadrículas, debido a la introducción de una unidad propuesta por el profesor. (p.458) El salto que se está dando en la enseñanza de la conservación de área está omitiendo las aproximaciones indicadas por Freudenthal tales como: repartir equitativamente, comparar y reproducir, los cuales son procesos donde el niño debe enfrentar situaciones tales como: cortar una pizza o pudín en porciones iguales, dividir una hoja del cuaderno en partes iguales doblando la hoja, reproducir determinadas figuras con el tangram, utilizar la cuadrícula de la libreta para dibujar rectángulos de diferente forma con igual área y medir las dimensiones del tablero o una baldosa del piso; En fin son muchas las situaciones que se pueden utilizar para enseñar el área donde se evidencia un aspecto común el uso de material manipulativo o didáctico lo cual también se está dejando a un lado al enseñar el área solo con el manejo de fórmulas.
- Siguiendo con el orden de los procesos indicados por Freudenthal, la medición se realiza mediante situaciones donde se establece una unidad de medida de superficie y luego con este patrón se recubre la superficie total a medir; también por medio de relaciones geométricas donde primero se mide el largo y el ancho del piso del salón de clases para posteriormente aplicar la

fórmula para determinar el área. Se puede notar que en este incluye el manejo de modelos matemáticos o fórmulas para determinar el área de un rectángulo. Al respecto, un amplio estudio realizado por Nicolas Rouche (como se citó citado en Fandiño y D'Amore, 2009) demuestra cómo “el rectángulo constituye un punto de partida básico para la adquisición del concepto de superficie, un punto crucial, la figura por excelencia, dado que a éste recurren casi todas las otras figuras que el alumno conocerá en el transcurso de la escuela primaria” (p. 81). Esto se evidencia por ejemplo en la aplicación de la estrategia romper y rehacer para determinar el área de un triángulo apoyándose en la fórmula del rectángulo, teniendo en cuenta que al trazar una diagonal del rectángulo salen dos triángulos rectángulos. De este proceso se entiende por qué en el modelo matemático del área del triángulo se divide entre dos.

- En el proceso de la medición, una de las formas de determinar el área es a partir de las dimensiones lineales. Al respecto Outhred y Mitchelmore (2000) destacan la importancia de una buena comprensión de la medición lineal y sin este aprendizaje es poco probable que los niños aprendan la relación entre el tamaño de la unidad y las dimensiones del rectángulo. También demostraron que una comprensión de la multiplicación no es necesaria para una comprensión de la medición de área, aunque es esencial para la fórmula de área. (p.165)
- De acuerdo con los autores mencionados anteriormente, enseñar el tema de área solamente con el manejo de fórmulas ocasiona debilidades en el proceso de conservación de área, al respecto Fandiño y D'Amore (2009) nombran varias obras (Piaget, 1937, Piaget, Inhelder, Szminska, 1948, Piaget, Inhelder, 1962) que fueron utilizadas como base para estudios realizados por seguidores del maestro ginebrino: Vihn, Lunzer y Bratto. En sus estudios evidencian la dificultad que manifiestan los estudiantes para apropiarse de la idea de superficie específicamente se demostró que para los estudiantes cuando varía la forma, la superficie

también varía (Fandiño y D'Amore, 2009). Además de las dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje del área, no se está enseñando teniendo en cuenta su relación con el pensamiento numérico, aleatorio y variacional sino de manera independiente, lo cual no es conveniente y de acuerdo a lo anterior los autores Del Olmo, Moreno y Gil (1993) afirman que: “el área es una de los temas menos cuidados en cuanto a las actividades que se realizan ya que se cercenan sistemáticamente mucho de sus ricos y variados matices y no suelen poner de manifiesto su conexión con otras partes de la matemática escolar” (p.21). También se le suma los resultados de De Araujo y Dos Santos (2009), según uno de sus trabajos de investigación consideran que los estudiantes al trabajar el tema de área tienen una fuerte tendencia a la realización de operaciones con los datos dados en el problema cuando el resultado aparece como una de las alternativas presentadas en la pregunta o en el enunciado. También notaron en el proceso de aprendizaje la carencia de tareas relacionadas con la comparación de las cantidades de área lo cual es importante para la comprensión y medición en el estudio del área de objetos geométricos, esta falta de atención posiblemente sea el origen de las dificultades en el aprendizaje del concepto de área.

- Retomando el proceso de la comparación y reproducción propuesto por Freundethal, se establece una relación con lo expuesto por Popoca y Acuña (2009) quienes concluyen que el reconocimiento de las propiedades figurales de las representaciones de los objetos geométricos resulta relevante para estar en condiciones de hacer comparaciones de figuras de área igual que han sido transformadas mediante cambio de forma, posición o recomposición, la observación del cambio de dimensión de los elementos figurales de las representaciones y la apreciación global-particular emerge como un prerrequisito no sólo para observar la igualdad sino para el tratamiento correcto de las representaciones en geometría. Es decir, para que un estudiante

pueda realizar la comparación necesita desarrollar la habilidad de identificar las diferencias y semejanzas de una figura geométrica basándose en las propiedades de la figura.

- Cada tipo de pensamiento se debe enseñar estableciendo la coherencia horizontal y sin omitir en las escuelas que la medición se aprende mediante situaciones problema donde el estudiante haga uso de instrumentos para realizar medidas estandarizadas y material manipulativo para realizar medidas no estandarizadas, esta experiencia en los salones conduce a comprender las magnitudes y no seguir en ese del cual Osborne (como se citó en los lineamientos curriculares del MEN, 1998) afirma lo siguiente: (...) en las escuelas actuales, gran parte de lo que se aprende sobre medición es de naturaleza puramente incidental. Los conceptos de medida aparecen en situaciones cuyo propósito es enseñar y aprender sobre el número. Se supone que la medida es intuitiva y está lo suficientemente poseída y comprendida por los alumnos como para servir de marco intuitivo en cuyo seno explicar las operaciones aritméticas. Tal presunción ha de ser puesta en tela de juicio, además la naturaleza de la forma en que los niños aprenden a medir y se valen de medidas en el contexto de esta transferencia exige cuidadosa atención. (p.41) No es llegar a las instituciones educativas y proponer como actividad resolver problemas donde el estudiante solamente realice cálculos aplicando unos modelos geométricos para llegar a un valor numérico con una unidad de medida.
- Por último, en cuanto a lo que implica desarrollar el tema de área en un plan de clases no se puede ignorar lo expuesto por Chamorro (2003), quien afirma:
  1. Las clases homogéneas se centran en trabajar con mayor frecuencia las actividades de tipo formal, como solucionar problemas derivados de la escritura correcta de una medida y las conversiones de unidades, dejando una menor frecuencia de trabajo a las actividades con estimación y aproximación de medidas que serían de gran utilidad en la vida cotidiana.



2. El manejo limitado de instrumentos de medición sabiendo que la comprensión y lectura de medidas forma parte de un aprendizaje social donde el estudiante encuentra la utilidad en el contexto cotidiano y en el de otras ciencias, favoreciendo el interés y la motivación para el desarrollo del pensamiento métrico.
  3. El desconocimiento del funcionamiento de los instrumentos de medida y por ende una equivocada elección del instrumento que debe ser utilizado en una situación de medida concreta son aspectos que conducen a la realización de medidas equivocadas y una mala representación geométrica del problema.
  4. La incapacidad para diferenciar superficie y perímetro, masa y volumen, etc. Lo cual requiere un tratamiento específico. Este tratamiento requiere que el estudiante descubra la utilidad de un sistema de unidades estandarizado y no estandarizado.
  5. El aprendizaje del área y del volumen presenta más dificultades que el de las magnitudes lineales porque los métodos usados con mayor frecuencia son la aplicación de algoritmos y fórmulas, en tanto que los métodos como la equidescomposición o la pavimentación que contribuyen a entender la naturaleza del concepto de magnitud están siendo relegados.
- (p.229)

## **4.2 Marco conceptual**

### **4.2.1 Concepto de área**

En el contexto cotidiano los estudiantes observan situaciones como los mensajes publicitarios acerca de la venta de casas o lotes donde colocan por ejemplo:  $100\text{m}^2$ ,  $300\text{m}^2$ , etc.; forrar una caja de cartón con papel regalo donde se debe tener en cuenta la cantidad de papel necesario para cubrir cada cara de la caja; comprar tela para hacer sábanas o cortinas; utilizar baldosas para la

remodelación del piso; observar los tableros y las mesas de diferentes salones de clases. Estas son situaciones donde el estudiante interactúa con objetos que les permite comparar superficies y determinar qué superficie es mayor o cuál es la cantidad de superficie que tiene cada objeto, partiendo de estas experiencias con el entorno, el estudiante va construyendo mentalmente la noción de área o cantidad de superficie lo cual es un proceso que lleva tiempo y a pesar que los estudiantes alcanzan el concepto de área pueden no ser capaz de utilizarlo con precisión. Esto se evidencia cuando los jóvenes en clase los cambian de curso durante el año y dicen: “vamos a quedarnos en este salón porque el tablero es más grande que el del otro curso”, cuando quieren decir que el tablero del curso donde están tiene mayor área que el del otro curso (Lovell, 1982). Al respecto en el proceso de enseñanza aprendizaje se debe tener presente el siguiente postulado: “A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único” (Clemens, O’Daffer y Cooney, 1998, p.394). Basado en este mismo postulado se define el área de la siguiente manera: “El área de una región poligonal es el número que se le asigna según el postulado anterior” (Moise y Downs, 1986, p.293).

El concepto de área está presente en muchas situaciones de la vida cotidiana que se han dado a conocer previamente por ende es necesario emplearlo de manera correcta. Del Olmo, Moreno y Gil (1993) expresan que:

Hay una cualidad de los objetos llamada generalmente superficie o área. Para algunos autores hay diferencias entre estos términos; la palabra superficie se emplea como cualidad y el área para referirse a la medida. Por lo tanto, consideran el área como una cualidad que puede medirse a través de sus unidades. (p.15)

Desde el punto de vista de las matemáticas, el área se refiere a figuras geométricas y en el presente trabajo de grado se consideran las áreas en los objetos bidimensionales y en los objetos tridimensionales, por tal motivo es necesario tener presente las siguientes aproximaciones

indicadas por Freudenthal (citado en Del Olmo et al., 1993) las cuales permiten la comprensión del concepto de área si son tenidas en cuenta para la preparación de clases:

- Repartir equitativamente: se incluyen las situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo, esto se realiza de tres maneras: aprovechando regularidades por percepción, por estimación y por medida.
- Comparar y reproducir: incluye situaciones en las que hay que comparar dos superficies y también las situaciones en las que hay que obtener una reproducción de una superficie con una forma diferente a la que tiene. Por ejemplo, dibujar un cuadrado que tenga la misma área que un triángulo dado. Estas situaciones pueden realizarse de la siguiente manera: inclusión, transformaciones de romper y rehacer, estimación, medida, y por medio de funciones.
- Midiendo: son aquellas situaciones donde la superficie aparece ligada a un proceso de medida, ya sea para comparar, repartir o valorar. Este proceso de medida se puede realizar de diferentes formas: por exhaustión con unidades, por acotación entre un valor superior e inferior, por transformaciones de romper y rehacer, por relaciones geométricas generales.

#### **4.2.2 Conservación de área**

El aprendizaje de las matemáticas debe brindar al estudiante el desarrollo de habilidades que le permitan aplicar el conocimiento fuera del ámbito escolar donde tiene que tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus ideas y escuchar a los demás. Para desenvolverse en la sociedad es necesario que relacione los temas de las mallas curriculares con la experiencia cotidiana considerando los tres aspectos que propone el MEN (1998):

- Procesos generales: comprende 5 procesos tales como el razonamiento, la comunicación, la resolución y planteamiento de problemas, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- Conocimientos básicos: se refiere a los tipos de pensamiento tales como el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional.
- El contexto: para trabajar las matemáticas se deben tener en cuenta el contexto de la vida cotidiana, el contexto de las matemáticas y el contexto de otras ciencias.

En los conocimientos básicos se encuentra el pensamiento métrico. El MEN (2006) lo define como: “Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (p.63). En este tipo de pensamiento se deben desarrollar los siguientes procesos y conceptos, según el MEN (1998):

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

Para la realización de este trabajo de grado solo se tuvo en cuenta la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes y específicamente se enfocó en la conservación de área

en 2D y en 3D. Por lo tanto, los conceptos fundamentales a tener presente son el área y la conservación de área.

Anteriormente ya fue presentado el concepto de área por consiguiente se da a conocer el concepto según Cabañas y Cantoral (2006) quienes afirman que: Por conservación se entiende aquella modificación que no produce cambios en un área. Significa que el valor de un área permanece sin cambios mientras su figura puede ser transformada a otra cualitativamente nueva. Puede darse a partir del cambio de posición de una figura sin modificar su forma al realizar movimientos como la rotación, traslación y reflexión. (p.728)

Piaget (como se citó en Cabañas, 2005) dice: “Que el concepto de conservación de área es un aspecto preliminar y fundamental en el entendimiento del concepto de medición de área entre los estudiantes, es decir, la conservación antecede a la medición” (p.459). Además, Piaget (citado en Olmo et, al, 1993) afirma que “la conservación tiene que ver con la invarianza de ciertas cualidades de los objetos cuando se ejercen transformaciones sobre ellos” (p.22).

#### **4.2.3 Sistemas de representación de Bruner**

Bruner (1984) en sus estudios llegó a la conclusión que sí se puede aprender y enseñar el concepto de conservación, para lograrlo construye la teoría de los sistemas de representación en donde la percepción y el lenguaje cumplen un rol importante. Estos sistemas de representación los define como “sistemas de procesamiento de la información mediante los cuales los seres humanos construyen modelos de la realidad: la acción, las imágenes mentales y el lenguaje” (Bruner, 2004, p.45). A estos tres sistemas los denominó representación enactiva, representación icónica y representación simbólica.

“La representación enactiva: es la manera de representar acontecimientos pasados por medio de respuestas motoras apropiadas” (Bruner, 2004, Pp. 47). En esta forma de representación se conoce algo por medio de la acción. Por ejemplo: Un niño se le presenta unos patines, se dice que conoce los patines si es capaz de transportarse de un lugar a otro patinando mostrando que domina este proceso y puede repetirlo.

“La representación icónica: codifica los acontecimientos mediante la organización selectiva de las imágenes mentales” (Bruner, 2004, p. 47). Esta representación se trata de conocer algo por medio de imágenes y tener la capacidad de representar un hecho mediante dibujos mentales. Tomando el ejemplo de los patines, al ver en un papel el dibujo de los patines la persona puede en la mente organizar las ideas de cómo utilizar esos patines para ir de un lugar a otro sin embargo, es importante tener en cuenta que el aprendizaje no es igual cuando tienes la imagen de los patines que cuando te los colocas para patinar. Por eso se debe resaltar la importancia de trabajar los sistemas de representación de manera progresiva y con la interacción entre ellos que a su vez les permite de pasar de un sistema a otro.

Por último se tiene, “la representación simbólica la cual consiste en la representación de objetos y acontecimientos por medio de símbolos que se manifiestan a través del lenguaje” (Bruner, 2004, Pp. 48). En pocas palabras, es conocer algo por medio de formas simbólicas como el lenguaje. En esta representación el estudiante puede ver la imagen de un objeto y saber que es porque cuando llegaba al parque muchas veces lo utilizó para pasear pero no saber qué nombre asignarle, entonces aquí juega un papel importante el dominio de un código simbólico para el cual se debe cumplir unas reglas (Bruner, 1984).

## **5. Objetivos**

### **5.1 Objetivo general**

Lograr un aumento significativo y la asociación en el aprendizaje de la conservación de área en 2D y en 3D para los estudiantes de 9º grado.

### **5.2 Objetivos específicos**

- Aumentar significativamente el aprendizaje de la conservación del área en 2D.
- Aumentar significativamente el aprendizaje la conservación del área en 3D.
- Determinar las asociaciones entre la conservación del área en 2D y en 3D para la preprueba y la posprueba.
- Determinar la valoración de la metodología por parte de los estudiantes.

## **6. Metodología**

### **6.1 Enfoque**

El enfoque de la investigación es cuantitativo porque es secuencial y probatorio con las siguientes etapas:

- Selección del tema.
- Planteamiento del problema con la(s) pregunta(s) problema(s).
- Objetivos de investigación.
- Revisión de literatura y elaboración del marco teórico.
- Hipótesis de investigación (pueden haberlas o no, dependiendo del tipo de investigación).
- Diseño de investigación.
- Recolección de datos: se fundamenta en la medición.
- Dado que los datos son producto de mediciones, se representan con números y se analizan con métodos estadísticos.
- Las conclusiones confirman o rechazan las hipótesis (Fernández y Baptista, 2014).

Adicionalmente, en el enfoque cuantitativo se enfatiza en variables lo más exactas y concretas que sea posible, es direccionado y el entendimiento del fenómeno es guiado a través de ciertas dimensiones que se consideran significativas por estudios previos (Fernández y Baptista, 2014).

### **6.2 Tipo**

Descriptivo en los objetivos que se refieren al aumento del aprendizaje y en la valoración de la metodología por parte de los estudiantes. En este tipo de estudios, el investigador se centra en medir con la mayor precisión posible la variable de interés (Fernández y Baptista, 2014). Y exploratorio en el objetivo referido a la determinación de las asociaciones entre la conservación del área en 2D y en 3D. Es exploratorio en esta parte porque “el objetivo consiste en examinar un



tema poco estudiado o novedoso” (Fernández y Baptista, 2014, p.91). Finalmente, esta investigación es de tipo descriptiva y exploratoria.

### 6.3 Diseño

Para el estudio descriptivo y exploratorio, el diseño es pre experimental de preprueba-posprueba con un solo grupo. “Los preexperimentos se llaman así porque su grado de control es mínimo” (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p.141). Este diseño se diagrama de la siguiente forma:

G                      O<sub>1</sub>                      X                      O<sub>2</sub>

A un grupo (G) se le aplica una prueba previa (O<sub>1</sub>) al tratamiento experimental, después se le administra el tratamiento (X) y finalmente se le aplica la prueba posterior (O<sub>2</sub>) al tratamiento (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

### 6.4 Población y participantes

La población está conformada por 36 estudiantes de 9º grado de ambos géneros, con edades comprendidas entre 14 y 15 años de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario ubicada en la localidad Norte Centro Histórico; la dirección es calle 43 No. 46 – 98 del barrio Rosario. De esta población se tomó una muestra de 29 estudiantes por muestreo intencional porque la muestra es seleccionada desde el criterio personal del investigador (Namakforoosh, 2005), en este estudio se tuvo en cuenta que el estudiante presentara la preprueba y la posprueba y que asistiera regularmente a clase durante la aplicación de la estrategia pedagógica.

### 6.5 Técnicas e instrumentos

Las técnicas e instrumentos empleados para la recolección de datos lo muestra la tabla 2.

Tabla 2. Técnicas e instrumentos de recolección.

<b>Técnicas</b>	<b>Instrumentos</b>
Preprueba y posprueba	Cuestionario escrito
Encuesta	Formato escrito

Fuente: Elaboración propia.

El criterio de evaluación de la preprueba y la posprueba lo muestra la tabla 3:

Tabla 3. Criterios de evaluación.

<b>Ítem</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Criterio de evaluación</b>
1	Conservación del área en 2D	0 si no responde; si la elección es incorrecta; si la elección es correcta y las áreas son incorrectas.  1 si la elección es correcta y las áreas son correctas.
2	Conservación del área en 3D	0 si no responde; si la elección es incorrecta; si la elección es correcta y las áreas son incorrectas.  1 si la elección es correcta y las áreas son correctas.

Fuente: Elaboración propia.

## 6.6 Procedimiento

El procedimiento para realizar la investigación fue el siguiente:

### 1) Lectura de artículos.

En esta etapa se realizó el planteamiento del problema partiendo del informe del ICFES (2018) correspondiente a los resultados de la Institución Educativa Distrital Nuestra Señora del Rosario en la prueba saber de 9°. A partir de esta situación se realizó la búsqueda y selección de artículos científicos relacionados con la conservación del área, pensamiento métrico, obstáculos y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del área y la metodología aplicada. Para la

búsqueda de la información se realizó el taller para el manejo de bases de datos y préstamos de libros en biblioteca, con este aprendizaje se elaboró el marco teórico, se establecieron los objetivos y la justificación.

## 2) Elaboración de instrumentos.

En esta etapa se realizó el diseño y la implementación de la preprueba con un cuestionario de dos preguntas, basado en el proceso de la conservación del área para 2D y 3D. Esta prueba fue revisada y validada por Rafael Escudero Trujillo PhD en educación, Licenciado en matemáticas y Guillermo Cervantes Campo, magister en matemáticas y licenciado en matemáticas (anexo 1). Terminada la preprueba se gestionó los formatos de consentimiento y asentamiento para solicitar permisos a los padres de los estudiantes de 9° y directivos docentes. Se realizó una prueba piloto con los estudiantes de 9° del año 2018. Tomando como base la preprueba se diseñó la posprueba con las mismas condiciones: número de preguntas, estructura de cada pregunta y temas (anexo 2).

Para el tratamiento experimental se realizaron dos planes de clase teniendo en cuenta los requisitos de formato del plan de clases de la Institución Educativa y la metodología de los sistemas de representación de Bruner.

## 3) Aplicación de los instrumentos y planes de clases.

Los instrumentos fueron aplicados a 29 estudiantes de 9°A, en el orden establecido a continuación:

- Preprueba: Cuestionario compuesto de 2 ítems, el cual permitió conocer la situación real de los estudiantes acerca de la conservación del área en 2D y en 3D. La preprueba fue aplicada el 21 de febrero de 2019, con una duración de 30 minutos (anexo 6, fotos 1 y 2).

- Planes de clase: Los planes de clases se aplicaron desde el 25 de febrero hasta el 22 de marzo de 2019. El plan de clases 1 se aplicó durante 6 horas de clase y el segunda plan de clases se aplicó durante 5 horas de clases (anexo 3 y 4; anexo 6: fotos 3, 4, 5 y 6).
- Posprueba: Cuestionario compuesto de 2 ítems con la misma estructura que la preprueba para evidenciar el alcance de los objetivos propuestos. La posprueba fue aplicada el 8 de abril de 2019 con una duración de 30 minutos (anexo 6, fotos 7 y 8).
- Encuesta tipo Likert: Compuesta de 8 ítems para valorar la metodología aplicada. La encuesta fue aplicada el 11 de abril de 2019 (anexo 5).

#### 4) Análisis y sistematización.

A partir de los resultados obtenidos en los cuestionarios (preprueba y posprueba) y la encuesta tipo Likert, se procedió a elaborar un análisis estadístico de los resultados arrojados por la preprueba y las posprueba aplicando un análisis descriptivo para la encuesta tipo Likert para valorar la metodología de los sistemas de representación de Bruner. Finalmente, se procedió a la sistematización de toda la información y se elaboraron conclusiones de la investigación.

## 7. Resultados

Los resultados de la preprueba los muestra la tabla 4:

Tabla 4. Resultados de la preprueba aplicada a una muestra de estudiantes de 9°.

No.	CA 2D	CA 3D
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	1	0
10	1	0
11	0	0
12	0	0
13	0	0
14	0	0
15	0	0
16	0	0
17	0	0
18	0	0
19	0	0
20	1	0
21	0	0
22	0	0
23	0	0
24	0	0
25	0	0
26	0	0
27	1	0
28	0	0
29	0	0

Fuente: Elaboración propia.

CA 2D: Conservación del área en 2D

CA 3D: Conservación del área en 3D

Los resultados de la posprueba los muestra la tabla 5:

Tabla 5. Resultados de la posprueba aplicada a una muestra de estudiantes de 9°.

<b>No.</b>	<b>CA 2D</b>	<b>CA 3D</b>
1	1	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	1	0
6	0	0
7	1	1
8	1	0
9	1	1
10	1	0
11	1	1
12	1	0
13	1	1
14	1	0
15	0	0
16	1	0
17	1	0
18	1	1
19	1	0
20	1	0
21	1	1
22	1	1
23	1	1
24	1	1
25	1	0
26	1	0
27	1	0
28	1	0
29	0	0

Fuente: Elaboración propia.

CA 2D: Conservación del área en 2D

CA 3D: Conservación del área en 3D

## 7.1 Aumento significativo del aprendizaje de la conservación del área en 2D

Para determinar el alcance de este objetivo se aplicó la prueba de McNemar para la significación de los cambios “en los cuales cada sujeto se utiliza como su propio control y en los que las mediciones se realizan ya sea en escala nominal u ordinal” (Siegel y Castellan, 2005, p.100). Para ello, se organizan los resultados de la conservación de área en 2D obtenidos en la preprueba y en la posprueba en la tabla 6 para obtener los cambios de 0 a 1 y de 1 a 0. Los cambios de 0 a 1 se marcan con el signo más (+) y los de 1 a 0 con el signo menos (-):

Tabla 6. Comparativo de los resultados de la preprueba y la posprueba correspondientes a la conservación de área en 2D.

No.	CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN 2D		
	PRE	POS	CAMBIO
1	0	1	+
2	0	0	
3	0	0	
4	0	0	
5	0	1	+
6	0	0	
7	0	1	+
8	0	1	+
9	1	1	
10	1	1	
11	0	1	+
12	0	1	+
13	0	1	+
14	0	1	+
15	0	0	
16	0	1	+
17	0	1	+
18	0	1	+
19	0	1	+
20	1	1	
21	0	1	+
22	0	1	+
23	0	1	+
24	0	1	+

25	0	1	+
26	0	1	+
27	1	1	
28	0	1	+
29	0	0	

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la tabla 4 se resumen en la siguiente tabla 7 denominada tabla de contingencia de  $2 \times 2$ :

Tabla 7. Contingencia de  $2 \times 2$  de los resultados de la preprueba y posprueba para la conservación de área 2D.

		<b>Posprueba</b>		<b>Total</b>
		<b>0 (No)</b>	<b>1 (Sí)</b>	
<b>Preprueba</b>	<b>0 (No)</b>	6	19	25
	<b>1 (Sí)</b>	0	4	4
	<b>Total</b>	6	23	<b>29</b>

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se aplican los siguientes pasos para la prueba de hipótesis:

1) La hipótesis nula es:

$H_0 \leq$  La proporción de los estudiantes que aprenden conservación de área en 2D es menor o igual que la proporción de los estudiantes que la desaprenden, utilizando los sistemas de representación de Bruner.

2) La hipótesis alternativa es:

$H_1 >$  La proporción de los estudiantes que aprenden conservación de área en 2D es mayor que la proporción de los estudiantes que la desaprenden, utilizando los sistemas de representación de Bruner.



- 3) Prueba estadística: Se aplica la prueba de McNemar para la significación de los cambios porque las muestras son pareadas y utiliza medidas nominales.
- 4) Nivel de significancia:  $\alpha = 0,01$  y  $N = 29$  (número de estudiantes a los que se les aplicó la preprueba y la posprueba).
- 5) Distribución muestral: Al aplicar la fórmula para la distribución muestral de  $X^2$  (ji cuadrada con un grado de libertad):

$$X^2 = \frac{(|19 - 0| - 1)^2}{19} = \frac{18^2}{19} = 17,05$$

- 6) El valor crítico para  $X^2$ , con un grado de libertad, es 3,32 (Siegel y Castellan, 2005, p.362).
- 7) Decisión: Como el valor observado de  $X^2$  (17,05) es mayor que el valor crítico de  $X^2$  (3,32), entonces se rechaza la hipótesis nula,  $H_0$ , y se concluye que los estudiantes sí aprendieron la conservación del área en 2D debido a la aplicación de los sistemas de representación de Bruner. Esto quiere decir que sí se alcanzó este objetivo con un 99% de confianza.

## 7.2 Aumento significativo del aprendizaje de la conservación del área en 3D

Para determinar el alcance de este objetivo se aplicó la prueba de McNemar para la significación de los cambios “en los cuales cada sujeto se utiliza como su propio control y en los que las mediciones se realizan ya sea en escala nominal u ordinal” (Siegel y Castellan, 2005, p.100). Para ello, se organizan los resultados de la conservación de área en 3D obtenidos en la preprueba y en la posprueba en la tabla 8 para obtener los cambios de 0 a 1 y de 1 a 0. Los cambios de 0 a 1 se marcan con el signo más (+) y los de 1 a 0 con el signo menos (-):

Tabla 8. Comparativo de los resultados de la preprueba y la posprueba correspondientes a la conservación de área en 3D.

	<b>CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN 3D</b>		
<b>No.</b>	<b>PRE</b>	<b>POS</b>	<b>CAMBIO</b>
1	0	0	
2	0	0	
3	0	0	
4	0	0	
5	0	0	
6	0	0	
7	0	1	+
8	0	0	
9	0	1	+
10	0	0	
11	0	1	+
12	0	0	
13	0	1	+
14	0	0	
15	0	0	
16	0	0	
17	0	0	
18	0	1	+
19	0	0	
20	0	0	
21	0	1	+
22	0	1	+
23	0	1	+
24	0	1	+
25	0	0	
26	0	0	
27	0	0	
28	0	0	
29	0	0	

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la tabla 9 se resumen en la siguiente tabla denominada tabla de contingencia de  $2 \times 2$ :

Tabla 9. Contingencia de 2 x 2 de los resultados de la preprueba y posprueba para la conservación de área 3D.

		<b>Posprueba</b>		<b>Total</b>
		<b>0 (No)</b>	<b>1 (Sí)</b>	
<b>Preprueba</b>	<b>0 (No)</b>	20	9	29
	<b>1 (Sí)</b>	0	0	0
	<b>Total</b>	20	9	<b>29</b>

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se aplican los siguientes pasos para la prueba de hipótesis:

1) La hipótesis nula es:

$H_0 \leq$  La proporción de los estudiantes que aprenden conservación de área en 3D es menor o igual que la proporción de los estudiantes que la desaprenden, utilizando los sistemas de representación de Bruner.

2) La hipótesis alternativa es:

$H_1 >$  La proporción de los estudiantes que aprenden conservación de área en 3D es mayor que la proporción de los estudiantes que la desaprenden, utilizando los sistemas de representación de Bruner.

3) Prueba estadística: Se aplica la prueba de McNemar para la significación de los cambios porque las muestras son pareadas y utiliza medidas nominales.

4) Nivel de significancia:  $\alpha = 0,01$  y  $N = 29$  (número de estudiantes a los que se les aplicó la preprueba y la posprueba).

- 5) Distribución muestral: Al aplicar la fórmula para la distribución muestral de  $X^2$  (ji cuadrada con un grado de libertad):

$$X^2 = \frac{(|9 - 0| - 1)^2}{9} = \frac{8^2}{9} = 7,11$$

- 6) El valor crítico para  $X^2$ , con un grado de libertad, es 3,32 (Siegel y Castellan, 2005, p.362).
- 7) Decisión: Como el valor observado de  $X^2$  (7,11) es mayor que el valor crítico de  $X^2$  (3,32), entonces se rechaza la hipótesis nula,  $H_0$ , y se concluye que los estudiantes sí aprendieron la conservación del área en 3D debido a la aplicación de los sistemas de representación de Bruner. Lo cual demuestra que sí se alcanzó este objetivo con un 99% de confianza.

### 7.3 Asociación del aprendizaje de la conservación del área en 2D y en 3D

Para este objetivo se organizan los resultados de la preprueba y posprueba en una tabla de frecuencias, como lo muestra la tabla 10:

Tabla 10. Frecuencia absoluta de los resultados de la preprueba y posprueba para la conservación de área 2D y 3D.

Preprueba				Posprueba		
CA 2D	CA 3D	$f$		CA 2D	CA 3D	$f$
1	1	0		1	1	9
1	0	4		1	0	14
0	1	0		0	1	0
0	0	25		0	0	6
Total		29		Total		29

Fuente: Elaboración propia.

CA 2D: Conservación del área en 2D

CA 3D: Conservación del área en 3D

$f$ : frecuencia absoluta

De la tabla 10 se observa que tanto en la preprueba como en la posprueba no existe un estudiante que no tenga conservación del área en 2D y que tenga conservación del área en 3D. Pero sí existen estudiantes que sí tienen conservación del área en 2D y no conservación del área en 3D tanto en la preprueba (4) como en la posprueba (14). Por tanto, se puede hacer la siguiente asociación para este grupo de estudiantes: No es posible que un estudiante no tenga conservación del área en 2D y sí tenga conservación del área en 3D. Las otras asociaciones, como lo muestra la tabla 8, son posibles. De esta forma se le da alcance a este objetivo.

## 7.4 Determinación de la valoración de la metodología por parte de los estudiantes

Tabla 11. Resultados de la encuesta tipo Likert.

<b>Afirmación</b>	<b>De acuerdo</b>	<b>Ni de acuerdo, ni en desacuerdo</b>	<b>En desacuerdo</b>
La metodología fue distinta respecto a los años anteriores en el tema de área y volumen de sólidos.	29 100%	0 0%	0 0%
La metodología te facilitó comprender mejor el tema de área y volumen de sólidos.	28 96,6%	1 3,4%	0 0%
El material didáctico utilizado fue adecuado para el desarrollo de las actividades.	29 100%	0 0%	0 0%
El tiempo empleado para realizar las actividades fue suficiente.	19 65,5%	7 24,1%	3 10,4%
Las orientaciones del profesor te permitieron aclarar las dudas.	27 93,1%	2 6,9%	0 0%
Las actividades grupales e individuales fueron adecuadas para la metodología aplicada.	28 96,6%	0 0%	1 3,4%
Las estrategias de evaluación utilizadas fueron adecuadas para la metodología.	29 100%	0 0%	0 0%
Te gustó esta manera de aprender los temas de medidas.	28 96,6%	1 3,4%	0 0%

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con la tabla anterior, se concluye:

- El 100% de los estudiantes considera que la metodología fue diferente a la aplicada a los años anteriores para aprender determinar el área y el volumen en figuras planas y poliedros.

- El 96,6% de los estudiantes considera que la metodología le facilitó el aprendizaje para la conservación del área y del volumen en poliedros.
- El 100% de los estudiantes le gustó el material utilizado en las actividades desarrolladas.
- El 65,5% de los estudiantes estuvo de acuerdo con el tiempo asignado para realizar las actividades y el 10,4% consideran que no se les dio el tiempo necesario para terminar las actividades.
- El 93,1% afirma que las orientaciones fueron un aspecto clave para resolver sus inquietudes y superar las dificultades.
- El 96,6% de los estudiantes consideran que los ejercicios o situaciones problemas planteados en cada actividad, estuvieron relacionadas con la metodología permitiendo la manipulación de recursos didácticos, trabajando con imágenes y utilizando la comunicación a través del lenguaje matemático y verbal. Además, les gustó la manera como aprendieron a realizar las medidas con unidades no estandarizadas.
- El 100% de los participantes considera que las evaluaciones fueron apropiadas con el trabajo realizado en las clases.

## 8. Conclusiones

La enseñanza del proceso de conservación de área utilizando los sistemas de representación de Bruner muestra que los estudiantes de 9° mejoraron significativamente en el aprendizaje de la conservación del área en 2D y en 3D, es decir que se alcanzaron los objetivos relacionados con el área con un 99% de confianza. Esto reafirma lo dicho por Bruner (1984) quien concluye en sus estudios que se puede aprender y enseñar el concepto de conservación utilizando la teoría de los sistemas de representación.

Realizando la asociación de los resultados de la preprueba y la posprueba se concluye que no existe un estudiante que no tenga conservación del área en 2D y que tenga conservación del área en 3D. Pero sí existen estudiantes que sí tienen conservación del área en 2D y no conservación del área en 3D. Entonces se concluye que en este grupo de estudiantes no es posible que un estudiante no tenga conservación del área en 2D y sí tenga conservación del área en 3D.

Con respecto a la valoración de la metodología por parte de los estudiantes, el 100% afirma que la metodología implementada fue distinta a la manera como le han enseñado en años anteriores los temas relacionados con el área; el material manipulativo utilizado fue apropiado para la realización de las actividades y las estrategias de evaluación fueron acorde con la metodología y los estándares.

El 96,6% de los estudiantes les gustó la manera en que se desarrolló el proceso de aprendizaje, la realización de actividades grupales e individuales y las orientaciones del profesor las cuales fueron pertinentes para resolver las inquietudes. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede concluir que la metodología implementada facilitó comprensión del proceso conservación de área.



## **9. Recomendaciones**

Por la experiencia obtenida en este trabajo de grado, se puede recomendar:

- Implementar una metodología coherente con el modelo pedagógico de la institución educativa, teniendo en cuenta el uso de material manipulativo apropiado para trabajar la representación enactiva y facilitar el aprendizaje de la conservación de área.
- Para desarrollar las actividades individuales y grupales es necesario contar con el material necesario por cada estudiante. Aunque los estudiantes estén realizando una actividad grupal es necesario que cada uno tenga el material manipulativo para mantener el trabajo continuo y el intercambio de ideas.
- Controlar el tiempo en el desarrollo de las actividades sin ejercer presión.

## Referencias

- Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje* (Alianza, ed.). Madrid.
- Bruner, J. (2004). *Desarrollo cognitivo y educación* (Quinta edi; Morata, ed.). Madrid.
- Cabañas, M. (2005). La Noción de Conservación en el Estudio del Área. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18(1983), 457–462.
- Cabañas, M. G., & Cantoral, R. (2006). La Conservación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 727–732.
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas* (Pearson Pr). Madrid.
- Clemens, S. R., O'daffer, P. G., Cooney, T. J., Mateos, M. L.(1998). *Geometría* (Pearson Ad). México.
- De araujo, A., & Dos Santos, M. (2009). Avaliação Externa do Projovem: o Caso de Áreas e Volumes External Evaluation of the ProJovem Program: the Case of Areas and Volumes. *Bolema : Boletim de Educação Matemática*, 22(33).
- Del Olmo, M. ., Moreno, M. ., y Gil, F. (1993). Superficie y volumen ¿ algo más que el trabajo con fórmulas? *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*, 19, 176.
- Desafíos matemáticos. (2016). *Desafío 82 cuarto grado*. (figura). Recuperado de <https://desafiosmaticosparati.wordpress.com/tag/perimetro-y-area/>
- Eisner, E. (1998). Cognición y representación: persiguiendo un sueño. *Enfoques Educativos*, 1, 34–42.
- Fandiño, M., & D´amore, B. (2009). *Área y perímetro: aspectos conceptuales y didácticos* (Magisterio). Bogotá.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

- Goñi, J. (2011). *Didáctica de las matemáticas* (Primera ed; GRAÓ, ed.). Barcelona.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. 6ª ed. México: Mc Graw Hill
- iChess.es. (2018). *Cómo ordenar el tablero de ajedrez*. (imagen). Recuperado de <https://www.ichess.es/blog/ajedrez-para-principiantes-tablero-ajedrez/>
- ICFES. (n.d.). *Informe de resultados por establecimiento Educativo 2015* (Ministerio de Educación Nacional, ed.). Retrieved from [//www2.icfes.gov.co/web/guest/divulgacion-saber-359-2015](http://www2.icfes.gov.co/web/guest/divulgacion-saber-359-2015)
- ICFES. (2016). *Inoforme Saber 3º, 5º y 9º 2012 Cuadernillo de prueba Segunda edición Matemáticas Grado 9º*. Recuperado de <https://www2.icfes.gov.co/web/guest/divulgacion-saber-359-2015>
- ICFES. (n.d.). *Informe de resultados de matemáticas 2017* (Ministerio de Educación Nacional, ed.). Retrieved from [//www2.icfes.gov.co/web/guest/divulgacion-saber-359-2015](http://www2.icfes.gov.co/web/guest/divulgacion-saber-359-2015)
- ICFES. (2018). *Reporte de la Excelencia 2018* (M. de E. Nacional, ed.). Bogotá, Colombia.
- Lovell, K. (1982). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños* (Cuarta Edi; Morata, ed.).
- Marmolejo, G. A., & González, M. T. (2014). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemáticas Educativa*, 18, 301–328. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1831>
- Marmolejo, G., y González, M. (2015). *El área de superficies planas en el campo de la educación matemática . Estado de la cuestión*. 10, 45–57.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Áreas Obligatorias y Fundamentales* (Ministerio de Educación Nacional, ed.). Bogotá D. C., Colombia.

- MEN. (2006). *Estandares Básicos de competencias en lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (Ministerio de Educación Nacional, ed.). Bogotá D. C., Colombia.
- Moise, E., y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. México: Addison-wesley Iberoamericana, S. A.
- Namakforoosh, M. (2005). *Metodología de la investigación*, 2ªed. México: Limusa.
- OCEANO, Grupo editorial; sf. El mentor de Matemáticas; con ejercicios resueltos. MMVI Editorial Océano. Primera edición.
- Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144–167. <https://doi.org/10.2307/749749>
- Pinterest. *culebra de Rubik*. (imagen). Recuperado de <https://co.pinterest.com/raqueldiezsanti/culebra-de-rubik/>
- Pinterest. *Patrones Hama*. (figura). Recuperado de <https://co.pinterest.com/gloria7890/patrones-hama/>
- Popoca, M., & Acuña, C. (2009). Cambios en figuras de área igual , conservación y relaciones figurales. *Comité Latinoamericano de Matemáticas A. C.*, 541–550.
- Rojas, C. (2015). *Introducción a la geometría*. Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte.

## Anexos

### Anexo1. Preprueba

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

1. Observa las figuras.

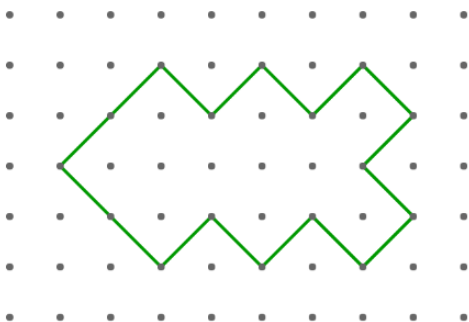


Figura 1\*

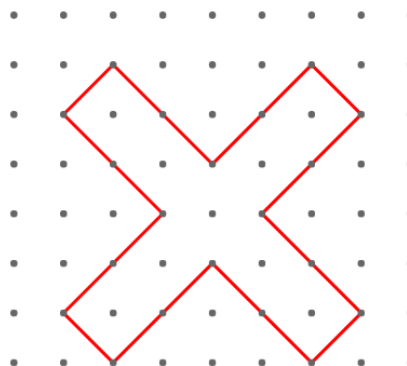



Figura 2\*

Si la unidad de área es el cuadrado , escribe una X, en el paréntesis de la derecha, en la afirmación verdadera:

- a) El área de la figura 1 es menor que el área de la figura 2. ( )
- b) El área de la figura 1 es mayor que el área de la figura 2. ( )
- c) El área de la figura 1 es igual al área de la figura 2. ( )

¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área de la figura 1? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área de la figura 2? \_\_\_\_\_

2. Cada uno de los dos siguientes sólidos están contruidos con cubos de igual tamaño.

\* Figuras 1 y 2 de autoría propia que no se titulan en detalle para no predisponer la respuesta del estudiante.

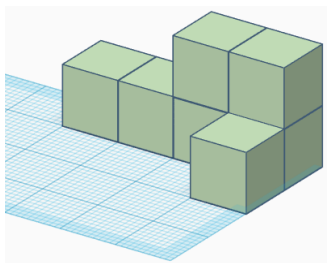


Figura 3\*

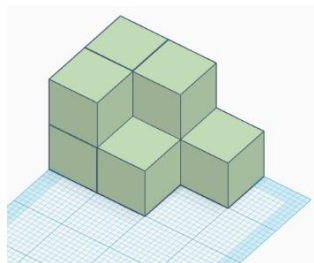


Figura 4\*

Si la unidad de área es una cara de un cubo, marca con una X, en el paréntesis de la derecha, la opción correcta:

- a) El área total del sólido de la figura 3 es menor que el de la figura 4. ( )
- b) El área total del sólido de la figura 3 es mayor que el de la figura 4. ( )
- c) El área total del sólido de la figura 3 es igual al de la figura 4. ( )

¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área total del sólido de la figura 3? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área total del sólido de la figura 4? \_\_\_\_\_

---

\* Figuras 3 y 4 de autoría propia que no se titulan en detalle para no predisponer la respuesta del estudiante.

## Anexo 2. Posprueba

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

1. Observa las figuras 1 y 2.

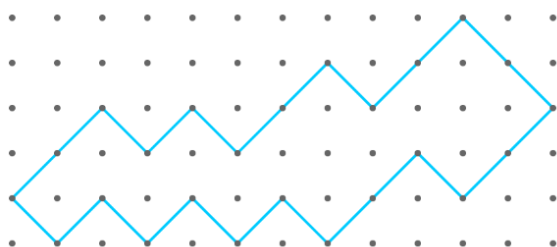


Figura 1\*

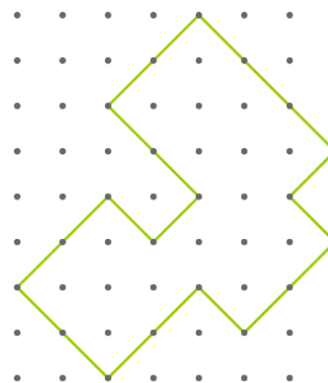
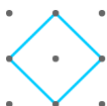


Figura 2\*

Si la unidad de área es el cuadrado , marca con una X en el paréntesis de la derecha la afirmación verdadera:

d) El área de la figura 1 es menor que el área de la figura 2. ( )

e) El área de la figura 1 es mayor que el área de la figura 2. ( )

f) El área de la figura 1 es igual al área de la figura 2. ( )

¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área de la figura 1? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área de la figura 2? \_\_\_\_\_

\* Figuras 1 y 2 de autoría propia que no se titulan en detalle para no predisponer la respuesta del estudiante.

2. Cada uno de los siguientes sólidos está construido con cubos de igual tamaño.

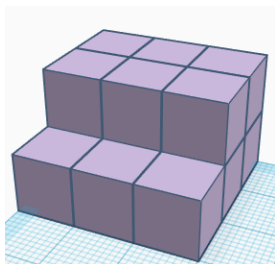


Figura 3\*

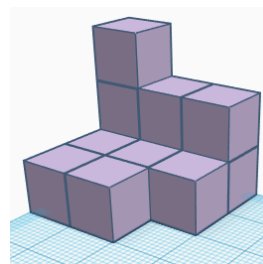


Figura 4\*

Si la unidad de área es una cara de un cubo, marca con una X en el paréntesis de la derecha la opción correcta:

d) El área total del sólido de la figura 3 es menor que el de la figura 4. ( )

e) El área total del sólido de la figura 3 es mayor que el de la figura 4. ( )

f) El área total del sólido de la figura 3 es igual al de la figura 4. ( )

¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área total del sólido de la figura 3? \_\_\_\_\_


¿Cuál es el área total del sólido de la figura 4? \_\_\_\_\_

---

\* Figuras 3 y 4 de autoría propia que no se titulan en detalle para no predisponer la respuesta del estudiante.



### Anexo 3. Plan de clase 1

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO</b>	<b>Fecha:</b>
		<b>Periodo:</b>
	<b>PLAN DE CLASE 1</b>	<b>Curso: 9°A</b>

**OBJETIVO:** Determinar el área de figuras planas utilizando unidades no estandarizadas.

**ESTÁNDARES.** Los estándares básicos de competencias en matemáticas establecen que los estudiantes deben alcanzar los siguientes aprendizajes:

- “Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto” (MEN, 2016, p.81).
- “Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas” (MEN, 2016, p.85).
- “Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos” (MEN, 2016, p.85).

**TEMA:** Área de figuras planas con unidades no estandarizadas.

**RECURSOS DIDÁCTICOS:** Tablero de ajedrez, juego de piezas de foami, papel, serpiente de Rubik, libreta cuadriculada, colores, lápiz, borrador, sacapunta y regla.

**TIEMPO:** 5 horas

### INICIO

**Saberes previos:** Teniendo en cuenta el tablero de ajedrez de la fa figura 1. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cuadrados conforman el tablero?\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

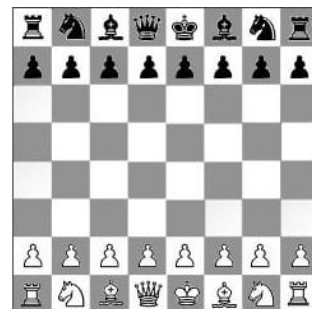


Figura 1<sup>†</sup>

En tu cuaderno dibuja un tablero de ajedrez. Traza diagonales como lo muestra la figura 2. ¿Cuántos triángulos cubren la superficie del tablero?

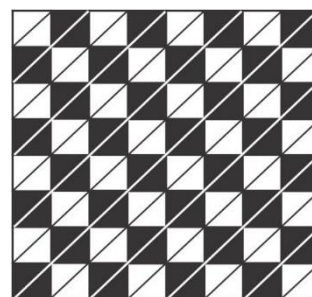


Figura 2\*

## DESARROLLO

**Conceptualización.** Según Rojas (2012) define lo siguiente:

Polígono: es la unión de segmentos que se juntan solo en sus extremos, de tal manera que:

- Como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto.
- Cada segmento toca exactamente otros dos.

La figura 3 muestra dos ejemplos de polígonos:

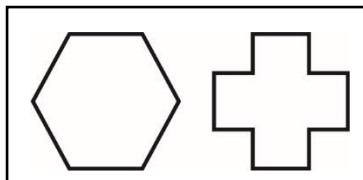


Figura 3<sup>†</sup>

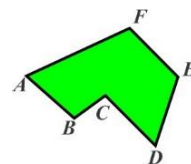
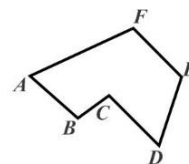
<sup>†</sup> Figura 1. Fuente: <https://www.ichess.es/blog/ajedrez-para-principiantes-tablero-ajedrez/>

\* Figura 2 de autoría propia.

<sup>†</sup> Figuras 3 modificada de la fuente: Rojas, (2015, p.28).

Patrón: es un objeto o instrumento que permite materializar y reproducir una unidad la unidad de medida.

Región poligonal: es un subconjunto de un plano limitado por un polígono. La figura 4 es la región poligonal, mientras que la figura 5 es el polígono.

Figura 4<sup>ra</sup>Figura 5<sup>ra</sup>

Unidad de área: es una región poligonal que se toma como patrón de medida y puede ser, por ejemplo, una región cuadrada, una región triangular, etc.



En consecuencia, el área de una figura es un número que expresa cuantas veces está contenida cierta unidad de área en el área de la figura.

Área: a cada región poligonal le corresponde un número positivo único, denominado área.

Cuadrado: es un rectángulo que tiene todos sus lados congruentes entre sí.

Triángulo: Sean A, B y C tres puntos no colineales. La reunión de los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ , y  $\overline{AC}$  se denomina un triángulo, y se simboliza con  $\triangle ABC$ . Los puntos A, B y C son los vértices, y los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ , y  $\overline{AC}$ , son los lados.

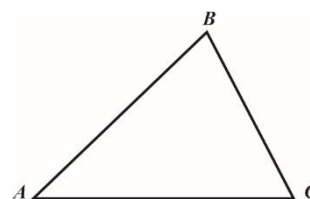
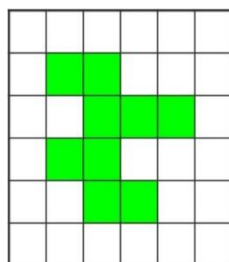
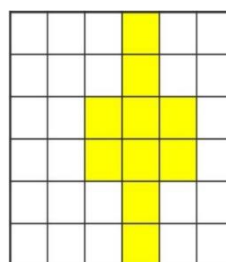


Figura 6

### Actividad 1

**Práctica:** Formar grupos de 3 estudiantes

1. Observa las figuras 7 y 8.

Figura 7<sup>ra</sup>Figura 8<sup>ra</sup>

<sup>ra</sup> Figuras 4 y 5 modificadas de la fuente: Rojas, (2015, p.116).

<sup>ra</sup> Figuras modificadas. Tomadas de la fuente: <https://desafiosmatematicosparati.wordpress.com/tag/perimetro-y-area/>

Si la unidad de área es un cuadrado de la cuadrícula.

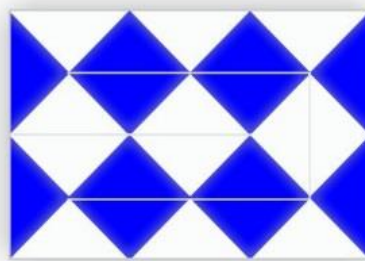
¿Cuál es el área de la figura 7? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el área de la figura 8? \_\_\_\_\_


2. Toma la serpiente de Rubik y construye la siguiente figura 9:



Figura 9<sup>†</sup>



Vista frontal<sup>\*</sup>

Si la unidad de área es el triángulo  ¿Cuál es el área de la vista frontal? \_\_\_\_\_

3. Toma el juego de piezas de foami y construye la vista frontal de la figura 5, luego observa que algunos triángulos forman cuadrados y otros no. Mueve los triángulos y colócalos de tal manera que solo se vean cuadrados amarillos y verdes.



Si la unidad de área es el cuadrado. ¿Cuál es el área de la figura?

<sup>†</sup> Figura 9. Fuente: <https://co.pinterest.com/raqueldiezsanti/culebra-de-rubik/>

<sup>\*</sup> Fuente: Elaboración propia.

## Actividad 2

### Práctica (actividad individual)

1. Colocar en la tabla el área de la región sombreada teniendo en cuenta el patrón de medida:

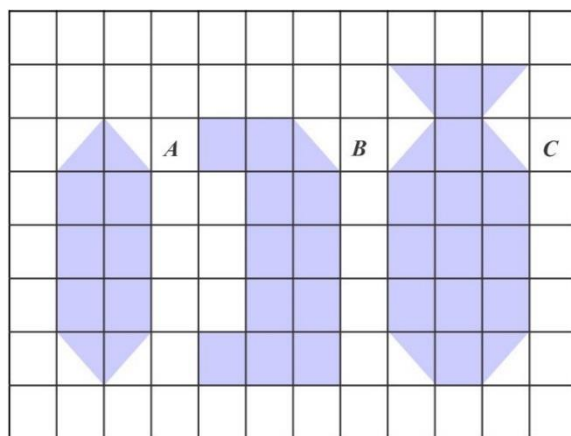


Figura 10<sup>ra</sup>

Figura	Patrón de medida cuadrado	Patrón de medida triangular
Figura A		
Figura B		
Figura C		

2. En tu libreta dibuja un rectángulo que tenga un área de 12 cuadrados. Dibuja un segundo rectángulo con diferente forma pero la misma cantidad de cuadrados.

<sup>ra</sup> Figura modificada tomada de la fuente: OCEANO, (s.f, p. 407).

### Actividad 3.

#### Evaluación (actividad individual)

1. Observa la figura 11.

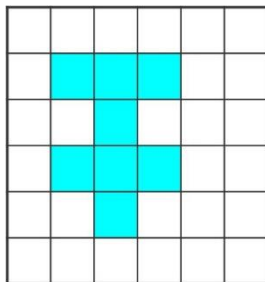
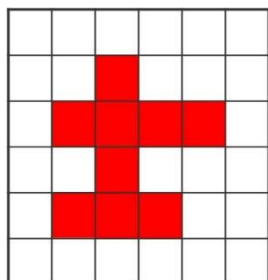
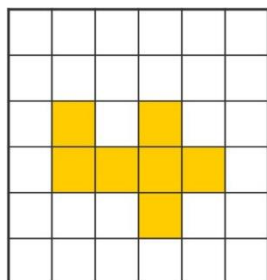


Figura 11<sup>¤</sup>

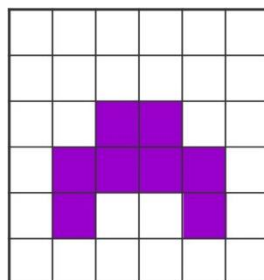
Selecciona una figura que tenga igual área a la figura 11.



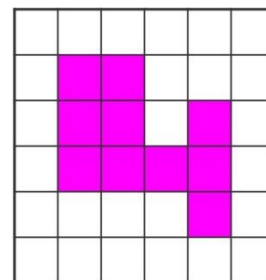
A



B



C



D

El área de la figura seleccionada es: \_\_\_\_\_

2. En la decoración de una pared emplearon baldosas de colores para realizar un dibujo representativo del Halloween como lo muestra la figura 8.

- ¿Cuál es el área de color naranja? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el área de color verde? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el área de color negro? \_\_\_\_\_

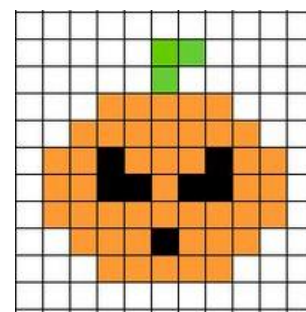


Figura 12<sup>†</sup>

<sup>¤</sup> La figura 11 y las figuras de las opciones A, B, C y D fueron modificadas de la fuente: <https://desafiosmaticosparati.wordpress.com/tag/perimetro-y-area/>

<sup>†</sup> Figura 12. Fuente: <https://co.pinterest.com/gloria7890/patrones-hama/>


**CIERRE**

Realizar la retroalimentación al finalizar cada una de las actividades planteadas.

Realizar resumen de los conceptos básicos.

Socializar los errores comunes y frecuentes en la realización de las actividades.

#### Anexo 4. Plan de clase 2

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO</b>	<b>Fecha:</b>
		<b>Periodo:</b>
	<b>PLAN DE CLASE 2</b>	<b>Curso: 9º A</b>

**OBJETIVO:** Determinar el área total de prismas con unidades no estandarizadas.

**ESTÁNDARES.** Los estándares básicos de competencias en matemáticas establecen que los estudiantes deben alcanzar los siguientes aprendizajes:

- “Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto” (MEN, 2016, p.81).
- “Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos” (MEN, 2016, p.83).
- “Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas” (MEN, 2016, p.85).

**TEMA:** Área total de prismas con unidades no estandarizadas.

**RECURSOS DIDÁCTICOS:** paquete de 14 cubos de madera, regla, lápiz y marcador borrrable.

#### INICIO

##### Saberes previos.

Del juego de cubos, toma un cubo y describe las siguientes características: forma de la cara, número de aristas, de caras y de vértices.

Construye el sólido de la figura 1 y dibuja las vistas: superior, inferior, frontal, detrás, izquierda y derecha.



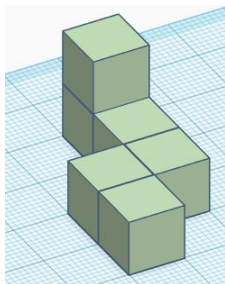


Figura 1\*

## DESARROLLO

**Conceptualización.** Según Rojas (2012) define lo siguiente:

**Sólidos:** El conjunto de todos los puntos se llama espacio.

**Arista:** Dada una recta  $l$  y un plano  $P$  que la contiene (figura 2). Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos denominados **semitplanos**. A la recta  $l$  se le llama **arista** o el **borde** de cada uno de los semiplanos.

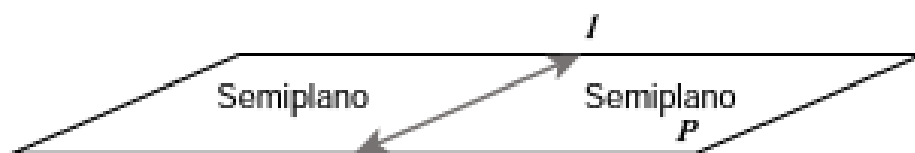


Figura 2†

Consideremos dos porciones de planos, que no estén alineados, en el espacio que se intersectan en una recta, como en la figura 3 de la izquierda:

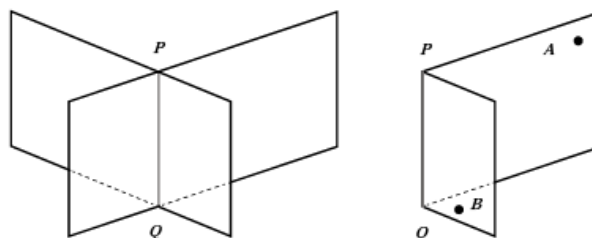


Figura 3†

La recta  $\overleftrightarrow{PQ}$  se llama arista.

\* Figuras 1 de autoría propia.

† Figuras 2 y 3. Fuente: Rojas, (2015, p.37).

Poliedro.

Un poliedro es un sólido que está formado por un número finito de regiones poligonales denominadas caras. Los lados y vértices de las caras se denominan, respectivamente, aristas y vértices. Cada arista de una cara es la arista de exactamente otra cara. Si dos caras se intersectan, lo hacen en una arista o en un vértice.

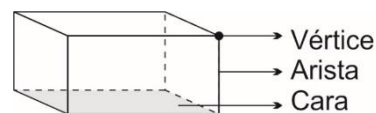
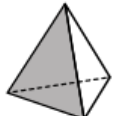
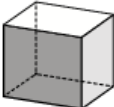


Figura 4\*

Poliedro regular: Es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y todos los vértices están rodeados por el mismo número de caras. La siguiente tabla muestra las características de algunos poliedros regulares.

Tabla 1. Características de algunos poliedros regulares

Nombre	Número de caras en un vértice	Forma de las caras	Figura 3D
Tetraedro regular	3	Triángulo equilátero	
Cubo (hexaedro regular)	3	Cuadrado	

Fuente: Rojas, (2015, p.42).

Los poliedros irregulares se clasifican en: prismas y pirámides.

Un **prisma** es un poliedro en el que:

- Hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos, denominadas bases.
- Todas las demás caras son regiones paralelogramáticas.

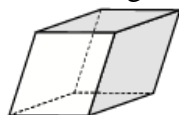
\* Figura 4. Fuente: elaboración propia.

Las caras paralelogramáticas se llaman **caras laterales**. Las caras laterales se intersecan unas con otras en segmentos paralelos llamados aristas laterales. La altura del prisma es un segmento perpendicular a los planos de las bases.

Hay una clase de prismas en el que todas las caras son regiones paralelogramáticas:

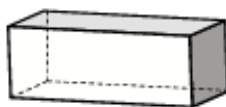
### **Paralelepípedo**

Un paralelepípedo es un prisma cuya base es una región paralelogramática.



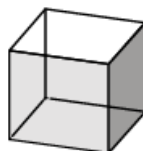
*Figura 5<sup>†</sup>*

**Paralelepípedo rectangular:** Es un prisma rectangular recto.



*Figura 6<sup>†</sup>*

**Cubo:** Es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son todas congruentes.



*Figura 7<sup>†</sup>*

### **Superficie lateral**

La superficie lateral de un prisma es la reunión de sus caras laterales. Por lo tanto, el área lateral de un prisma es el área de su superficie lateral.

### **Superficie total**

La superficie total de un prisma es la reunión de sus caras laterales y sus dos bases.

---

<sup>†</sup> Las figuras 5, 6 y 7 fueron tomadas de la fuente: Rojas, (2015, pp.46 y 47)

Similarmente, el área total de un prisma es el área de su superficie total. El área total de un prisma es la misma área de su **molde plano**.

### Actividad 1

**Práctica:** Formar grupos de 3 estudiantes.

1. Utiliza los cubos de madera y construye los sólidos de las figuras 8, 9 y 10.

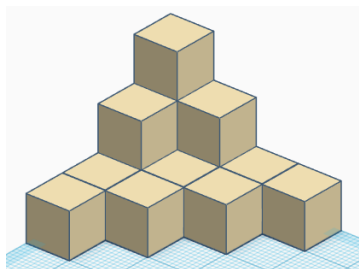


Figura 8\*

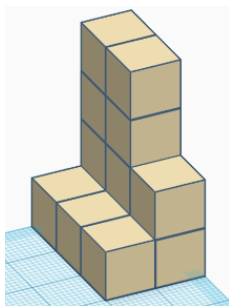


Figura 9\*

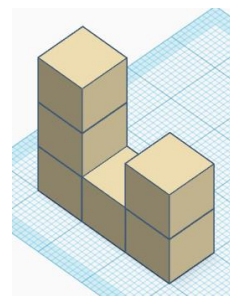


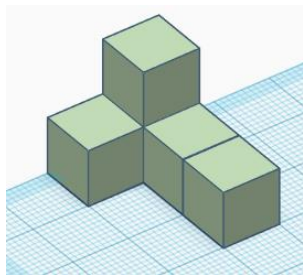
Figura 10\*

Completa la tabla colocando el área de cada vista del sólido y utilizando como unidad de área la cara de un cubo.

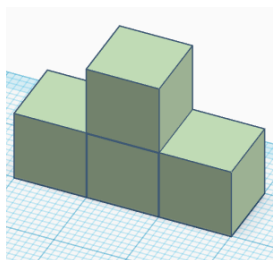
	Vista frontal	Vista detrás	Vista derecha	Vista izquierda	Vista superior	Vista inferior	Área total
Figura 2							
Figura 3							
Figura 4							

\* Figuras 8, 9 y 10 son de autoría propia.

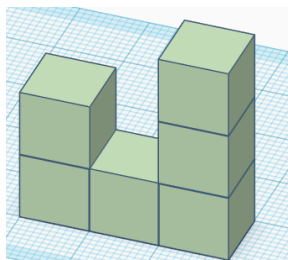
2. Observa la figura 11.



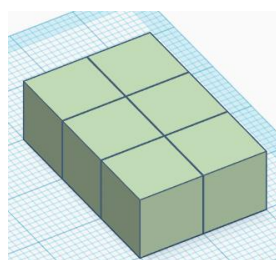
*Figura 11\**



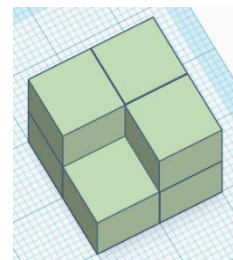
A



B



C



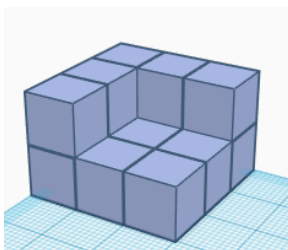
D

¿Qué sólido tiene la misma área total de la figura 11? \_\_\_\_\_ y ¿cuál es el área total de la figura? \_\_\_\_\_

## Actividad 2

### Evaluación (actividad individual)

1. Utiliza los cubos de madera y construye el sólido que muestra la figura 12.



*Figura 12\**

---

\* La figuras 11, 12 y las figuras de las opciones A, B, C y D son de autoría propia.

Si la unidad de medida del área es una cara de un cubo, el área total de la figura es:

---

### **CIERRE**

Realizar la retroalimentación al finalizar cada una de las actividades planteadas.

Realizar resumen de los conceptos básicos.

Socializar los errores comunes y frecuentes en la realización de las actividades.

### Anexo 5. Encuesta tipo Likert

**Institución:** \_\_\_\_\_ **Curso:** \_\_\_\_\_

**Nombre:** \_\_\_\_\_ **Fecha:** \_\_\_\_\_

Marca con una **x** en la casilla correspondiente después de leer cada afirmación.

<b>Afirmación</b>	<b>De acuerdo</b>	<b>Ni de acuerdo, ni en desacuerdo</b>	<b>En desacuerdo</b>
La metodología fue distinta respecto a los años anteriores en el tema de área y volumen de sólidos.			
La metodología te facilitó comprender mejor el tema de área y volumen de sólidos.			
El material didáctico utilizado fue adecuado para el desarrollo de las actividades.			
El tiempo empleado para realizar las actividades fue suficiente.			
Las orientaciones del profesor te permitieron aclarar las dudas.			
Las actividades grupales e individuales fueron adecuadas para la metodología aplicada.			
Las estrategias de evaluación utilizadas fueron adecuadas para la metodología.			
Te gustó esta manera de aprender los temas de medidas.			

## Anexo 6. Evidencias fotográficas de las sesiones

Preprueba. Febrero 21 de 2019.



Foto 1



Foto 2

Plan de clase 1. Febrero 25 de 2019

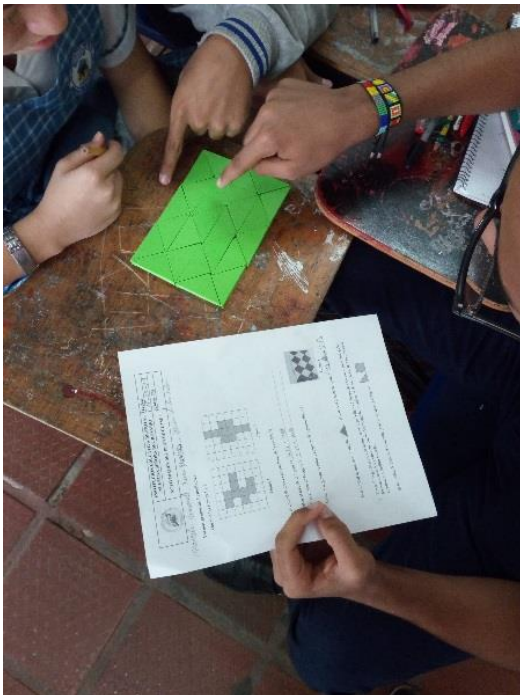


Foto 3



Foto 4



Plan de clase 2. Marzo 14 2019



Foto 5

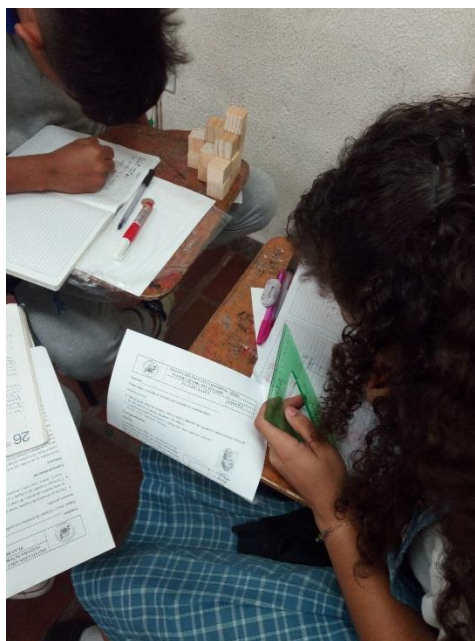


Foto 6

Posprueba. Abril 8 de 2019.

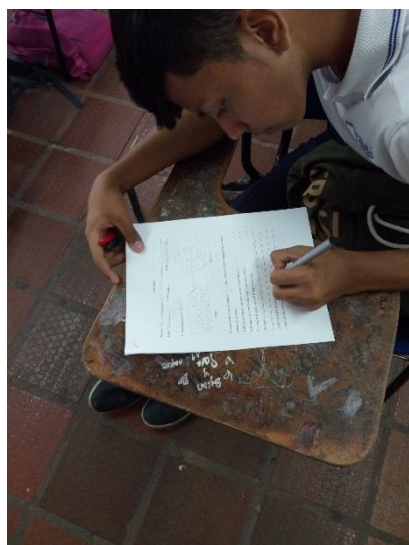


Foto 7



Foto 8

Encuesta tipo Likert. Abril 11 de 2019.



Foto 9